Instabilitäten, Turbulenz und Funkelrauschen in Halbleitern II
Vom eigenen Magnetfeld bewirkte Strominstabilitäten

P. H. HANDEL

Institut für Physik der Rumänischen Akademie, Bukarest

(Z. Naturforschg. **21 a**, 573—579 [1966]; eingegangen am 12. August 1965)

Es wird gezeigt, daß in Gegenwart einer quer zur Stromrichtung verlaufenden Potentialschwelle im Halbleiter das eigene Magnetfeld des Stromes I Instabilitäten im Plasma der Ladungsträger hervorruft. Diese sind mit den Pinch-Instabilitäten verwandt. Während bei letzteren die instabilen Glieder quadratisch von I abhängen, tritt hier wegen dem starken elektrischen Feld der Potentialschwelle eine lineare I-Abhängigkeit der instabilen Glieder auf. Dadurch ergibt sich eine viel kleinere kritische Stromstärke als bei dem Pinch-Effekt. Diese bei Kontakten, Korngrenzen u. a. Halbleiterinhomogenitäten, sowie allgemein bei Potentialschwellen auftretenden Instabililäten sind am ehesten geeignet, schon bei kleinen Belastungen hydromagnetische Turbulenz im zweikomponentigen Ladungsträgerplasma auszulösen.

Im ersten Teil dieser Arbeit [1] wurden Instabilitäten des Stromflusses in einer Halbleiterplatte behandelt, ohne den Einfluß von Magnetfeldern in Betracht zu ziehen. Im vorliegenden zweiten Teil wollen wir die vom eigenen Magnetfeld hervorgerufenen Instabilitäten auffinden. Diese erscheinen am ehesten geeignet, hydromagnetische Turbulenzprozesse im Plasma der Ladungsträger auszulösen und kommen als Ursache des Funkelrauschens am ehesten in Frage. Wie schon in der Einleitung von I bemerkt wurde, behandeln wir durch äußere Magnetfelder bewirkte Instabilitäten hier nicht.

§ 1. Aufstellung der Stabilitätsgleichung

Betrachten wir dieselbe Halbleiterplatte wie in I, die also in der z-Richtung von den Ebenen $z=\pm L_z/2$ begrenzt ist, in der x- und y-Richtung aber unbegrenzt oder verhältnismäßig sehr ausgedehnt ist. Die Platte sei entweder homogen (§ 2), oder aber allein in der x-Richtung inhomogen, und zwar so, daß in diesem Fall $x=0$ die Ebene eines p–n- (§ 3), p–p⁺- oder n–n⁺-Überganges (§ 4) ist. In der x-Richtung wird eine äußere Spannung V angelegt, die ein elektrisches Feld E_x erzeugt. Im inhomogenen Fall ist $E_x \neq 0$, selbst wenn $V=0$ ist. In diesem Fall ist E_x von x abhängig, wobei der größte Spannungsabfall an der Sperrschicht bei $x=0$ erfolgt. Nehmen wir in den Grundgleichungen von I noch die magnetischen Glieder hinzu und setzen wir einfachheitshalber $\nu_n=\nu_p$, so erhalten wir [2]

$$\nu\, n\, \boldsymbol{v}_n = -e\, n\left(\boldsymbol{E}+\frac{\boldsymbol{v}_n}{c}\times\boldsymbol{B}\right)-T\,\nabla n, \tag{1}$$

$$\nu\, p\, \boldsymbol{v}_p = e\, p\left(\boldsymbol{E}+\frac{\boldsymbol{v}_p}{c}\times\boldsymbol{B}\right)-T\,\nabla p, \tag{2}$$

$$\frac{\partial n}{\partial t}+\nabla(n\,\boldsymbol{v}_n)=s, \tag{3}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}+\nabla(p\,\boldsymbol{v}_p)=s, \tag{4}$$

$$s=-R(n\,p-n_i^2), \tag{5}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\frac{4\pi e}{c}(p\,\boldsymbol{v}_p-n\,\boldsymbol{v}_n), \tag{6}$$

$$\nabla\boldsymbol{B}=0, \tag{7}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}, \tag{8}$$

$$\nabla\boldsymbol{E}=\frac{4\pi e}{\varkappa}(p-n-N_A+N_D). \tag{9}$$

Hier bedeuten wie auch in I, n, p, $\boldsymbol{v}_n$, $\boldsymbol{v}_p$ die Konzentrationen und Driftgeschwindigkeiten der Elektronen und Löcher, T die mit der BOLTZMANN-Konstante multiplizierte Temperatur, R eine Rekombinationsgeschwindigkeit, $\varkappa$ die Dielektrische Konstante des Gitters, N_A, N_D die Konzentrationen der ionisierten Akzeptoren und Donatoren. Die hier gewählte Form (5) der Volumenrekombination ist nicht wesentlich für das folgende.

[1] P. H. HANDEL, Z. Naturforschg. **21 a**, 561 [1966]; weiterhin mit I bezeichnet.

[2] Siehe auch die Besprechung der Grundgleichungen durch E. GROSCHWITZ u. K. SIEBERTZ, Z. Naturforschg. **11 a**, 482 [1956]; **12 a**, 529 [1957] oder P. H. HANDEL, Rev. Roumaine Physique **10**, 35 [1965].

Wenn man die Gln. (1) und (2) skalar und vektoriell mit dem Magnetfeld $\boldsymbol{B}$ multipliziert, kann man sie nach den Driftgeschwindigkeiten auflösen:

$$\frac{\nu}{T} n \boldsymbol{v}_{\mathrm{n}} = -\frac{1}{1+b^2}(\nabla n + \boldsymbol{\epsilon} n) + \frac{1}{1+b^2}(\nabla n + \boldsymbol{\epsilon} n) \times \boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b}\nabla n + \boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{b} n)\boldsymbol{b}, \tag{10}$$

$$\frac{\nu}{T} p \boldsymbol{v}_{\mathrm{p}} = -\frac{1}{1+b^2}(\nabla p - \boldsymbol{\epsilon} p) - \frac{1}{1+b^2}(\nabla p - \boldsymbol{\epsilon} p) \times \boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b}\nabla p - \boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{b} p)\boldsymbol{b}, \tag{11}$$

$$\boldsymbol{b} \equiv \frac{e}{c\nu}\boldsymbol{B}, \quad \boldsymbol{\epsilon} = \frac{e}{T}\boldsymbol{E}. \tag{12}$$

Führen wir nun (10) und (11) in (6) und in die Summe von (3) und (4) ein, so folgt

$$\begin{aligned}\nabla \times \boldsymbol{b} = &-\frac{1}{1+b^2}[\nabla(P-N) - \boldsymbol{\epsilon}(P+N)] - \frac{1}{1+b^2}[\nabla(P+N) - \boldsymbol{\epsilon}(P-N)] \times \boldsymbol{b} \\ &- [\boldsymbol{b}\nabla(P-N) - \boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{b}(P+N)]\boldsymbol{b},\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}\frac{\nu}{T}\frac{\partial(N+P)}{\partial t} = \nabla\Big\{&\frac{1}{1+b^2}[\nabla(P+N) - \boldsymbol{\epsilon}(P-N)] + \frac{1}{1+b^2}[\nabla(P-N) - \boldsymbol{\epsilon}(P+N)] \times \boldsymbol{b} \\ &+ [\boldsymbol{b}\nabla(P+N) - \boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{b}(P-N)]\boldsymbol{b}\Big\} + \frac{\nu}{T}S,\end{aligned} \tag{14}$$

$$N \equiv \frac{4\pi e^2 T}{c^2 \nu^2} n, \quad P \equiv \frac{4\pi e^2 T}{c^2 \nu^2} p, \quad S \equiv \frac{4\pi e^2 T}{c^2 \nu^2} s. \tag{15}$$

Die ungestörte (stationäre) Lösung ist von y unabhängig und wird weiterhin mit dem Index 0 bezeichnet. Sie entspricht einer zur Mittelebene $z=0$ symmetrischen Verteilung der Ladungsträger, mit einem Maximum von N^0 und P^0 bei $z=0$ und einem monotonen Abfall bis zu den Oberflächen $z = \pm L_z/2$ als Folge der magnetischen Kräfte. Nach der x-Richtung sind P^0 und N^0 im homogenen Fall konstant, ändern sich aber andernfalls in entgegengesetztem Sinn. Das Magnetfeld $\boldsymbol{b}^0$ liegt nur in Richtung der y-Achse und wechselt das Vorzeichen mit z. Das elektrische Feld $\boldsymbol{\epsilon}^0$ hat eine x-Komponente und eine kleine, ebenfalls in bezug auf z unpaarige Komponente entlang der z-Achse. Letztere entsteht schon nur dadurch, daß die Ladungsträger von den magnetischen Kräften teilweise zur Mittelebene getrieben werden und geladene Störstellen hinterlassen.

Jedenfalls, auch wenn wir bei $z = \pm L_z/2$ elektrisch geladene Oberflächenzustände in Betracht ziehen (mit gleichem Oberflächenpotential auf beiden Flächen), werden auf der Mittelebene $z=0$ die ungestörten Felder b^0 und $\varepsilon_z{}^0$, sowie $\partial N^0/\partial z$ und $\partial P^0/\partial z$ als unpaarige z-Funktionen verschwinden. Übrigens folgt für diese ungestörte Lösung aus der x-Komponente von Gl. (13) noch die Beziehung

$$-\frac{\mathrm{d}b^0}{\mathrm{d}z} = -\frac{1}{1+(b^0)^2}\left[\frac{\partial(P^0-N^0)}{\partial x} - \varepsilon_x(P^0+N^0)\right] + \frac{b^0}{1+(b^0)^2}\left[\frac{\partial(P^0+N^0)}{\partial z} - \varepsilon_z(P^0-N^0)\right] \equiv j_x{}^0, \tag{16}$$

worin $j_x{}^0$ die mit $4\pi e/c^2\nu$ multiplizierte x-Komponente der Stromdichte ist.

In Gl. (13) und (14) setzen wir nun $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}^0 + \boldsymbol{b}'$, $N = N^0 + N'$, $P = P^0 + P'$. Die mit einem Strich bezeichneten Größen beschreiben eine kleine, der stationären Lösung überlagerte Störung. Wir beschränken uns hier auf neutrale Störungen[3]: $P' = N'$ und $\boldsymbol{\epsilon}' = 0$. Man erhält so für die Störung das System

$$\begin{aligned}\nabla \times \boldsymbol{b}' = &\frac{2}{1+(b^0)^2}\boldsymbol{\epsilon} N' - \frac{2}{1+(b^0)^2}\nabla N' \times \boldsymbol{b}^0 - \frac{1}{1+(b^0)^2}[\nabla(P^0+N^0) - \boldsymbol{\epsilon}(P^0-N^0)] \times \boldsymbol{b}' \\ &- [\boldsymbol{b}'\nabla(P^0-N^0) - \boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{b}'(P^0+N^0)]\boldsymbol{b}^0 \\ &- \frac{2 b^0 b_y'}{[1+(b^0)^2]^2}\{\nabla(P^0-N^0) - \boldsymbol{\epsilon}(P^0+N^0) + [\nabla(P^0+N^0) - \boldsymbol{\epsilon}(P^0-N^0)] \times \boldsymbol{b}^0\},\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}2\frac{\nu}{T}\frac{\partial N'}{\partial t} = \frac{\nu}{T}S' + \nabla\Big\{&\frac{2}{1+(b^0)^2}\nabla N' - \frac{2}{1+(b^0)^2}N'\boldsymbol{\epsilon} \times \boldsymbol{b}^0 + \frac{\partial N'}{\partial y}b^0\boldsymbol{b}^0 + \frac{1}{1+(b^0)^2}[\nabla(P^0-N^0) - \boldsymbol{\epsilon}(P^0+N^0)] \\ &\times \boldsymbol{b}' + [\boldsymbol{b}'\nabla(P^0+N^0) - \boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{b}'(P^0-N^0]\boldsymbol{b}^0 - \frac{2 b^0 b_y'}{[1+(b^0)^2]^2}[\nabla(P^0+N^0) - \boldsymbol{\epsilon}(P^0-N^0) + [\nabla(P^0-N^0) \\ &- \boldsymbol{\epsilon}(P^0+N^0)] \times \boldsymbol{b}^0]\Big\},\end{aligned} \tag{18}$$

[3] Das ist eine starke Einschränkung der Klasse untersuchter Störungen. Verzichtet man auf diese Einschränkungen, so kann man möglicherweise noch andere, in vorliegender Arbeit nicht erfaßte Arten von Instabilitäten erhalten.

worin
$$S' = -R(n^0+p^0)\,N' = -\frac{2}{\tau}N' \tag{19}$$
ist und τ eine Rekombinationszeit bezeichnet. In einer kleinen Umgebung der Ebene $z=0$ ist $b^0 \approx 0$, $\varepsilon_z{}^0 \approx 0$, $\partial N^0/\partial z \approx \partial P^0/\partial z \approx 0$, so daß aus der x-Komponente von (17) und aus (18) die Gleichungen
$$\frac{\partial b_z'}{\partial y} - \frac{\partial b_y'}{\partial z} = 2\,\varepsilon_x N', \tag{20}$$
$$2\frac{\nu}{T}\frac{\partial N'}{\partial t} = -\frac{2\nu}{\tau T}N' + 2\nabla^2 N' - 2\,\varepsilon_x N'\frac{\mathrm{d}b^0}{\mathrm{d}z} + \left[\frac{\partial(P^0-N^0)}{\partial x} - \varepsilon_x(P^0+N^0)\right]\left(\frac{\partial b_y'}{\partial z} - \frac{\partial b_z'}{\partial y}\right) \tag{21}$$
folgen. Formt man in Gl. (21) die letzten zwei Glieder mit Hilfe von (16) und (20) um, so bemerkt man, daß sie einander gleich sind und erhält schließlich
$$\frac{\nu}{T}\frac{\partial N'}{\partial t} = \nabla^2 N' + 2\,\varepsilon_x j_x{}^0 N' - \frac{\nu}{T}\frac{N'}{\tau} \tag{22}$$
für die Entwicklung der Störung N' an der Mittelebene [4]. Um festzustellen, welche Glieder in der Stabilitätsgleichung (22) einen stabilen bzw. instabilen Beitrag leisten, multiplizieren wir sie mit N'
$$\frac{\nu}{2T}\frac{\partial N'^2}{\partial t} = N'\,\nabla^2 N' - \frac{\nu}{\tau T}N'^2 + 2\,\varepsilon_x j_x{}^0 N'^2. \tag{23}$$
Das zweite Glied rechts trägt dem stabilen Einfluß der Volumenrekombination Rechnung. Das erste Glied enthält die Diffusionskraft und bringt den – ebenfalls stabilen – Beitrag der Oberflächenrekombination mit sich. Ist letztere unendlich groß, so kann die Konzentration der Elektron–Loch-Paare an der Oberfläche überhaupt nicht vom ungestörten Wert abweichen ($N_s{}'=0$) und
$$N'\,\nabla^2 N' \leqq -\pi^2\left(\frac{1}{L_z{}^2} + \frac{1}{L_x{}^2} + \frac{1}{L_y{}^2}\right)N'^2, \tag{24}$$
was die Instabilitäten am meisten beungünstigt. Liegt irgendeine endliche Rate der Oberflächenrekombination vor, so muß man in (24) rechts L_x, L_y und L_z durch größere, sogen. extrapolierte oder effektive Längen L_x', L_y', $L_z' > L_x$, L_y, L_z ersetzen, die aus den Randbedingungen zu ermitteln sind. Nur bei völlig fehlender Oberflächenrekombination dürfen wir auch Störungen in Betracht ziehen, für die das erste Glied in (23) verschwindet. Im Falle starker Injektion von Elektron–Loch-Paaren durch die Oberfläche kann $N'\,\nabla^2 N'$ schließlich auch positiv werden. Um hinreichende Instabilitätsbedingungen zu erhalten, wollen wir aber weiterhin den zuerst besprochenen, ungünstigsten Fall unendlich großer Oberflächenrekombination betrachten.

[4] Integriert man die zu (23) analoge, nicht auf die Mittelebene bezogene Gleichung über z, so verschwinden bei Störungen, die in z symmetrisch sind, einige unpaarige Glieder, und die anderen, sich auf der Mittelebene annullierenden symmetrischen Glieder sind klein, so daß man praktisch dasselbe Kriterium erhält.

§ 2. Stabilität des Stromes im homogenen Material

Das dritte Glied in Gl. (23) liefert im homogenen Fall sicher einen instabilen Beitrag. Tatsächlich ist dann der auf das Einheitsintervall der y-Achse bezogene Strom I dem angelegten Feld E_x proportional:
$$\varepsilon_x = \frac{e\,E_x}{T} = \frac{\nu}{e^2(\bar n + \bar p)}\,\frac{e}{T}\,\frac{I}{L_z}. \tag{25}$$
Hier sind $\bar n$ und $\bar p$ über z gemittelte Konzentrationen und $\nu/[e^2(\bar n+\bar p)]$ der spezifische Widerstand. Im homogenen Fall tritt also entsprechend Gln. (23) und (24) Instabilität auf, sobald
$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{I}{L_z}\right)^2 > \frac{\pi}{8}\,(\bar n+\bar p)\,T\left(\frac{1}{L_z{}^2} + \frac{1}{L_x{}^2} + \frac{1}{L_y{}^2} + \frac{\nu}{\pi^2\,\tau\,T}\right) \tag{26}$$
oder, wenn L_x, $L_y \gg L_z$ sind, sobald $I > I_0$ ist, mit
$$\left(\frac{I_0}{c}\right)^2 = \frac{\pi}{4}\,\frac{\bar n+\bar p}{2}\,T\left(1 + \frac{L_z{}^2}{\pi^2 L_\mathrm{d}{}^2}\right). \tag{27}$$
Hier bezeichnet $L_\mathrm{d} = \sqrt{\tau\,T/\nu}$ die für beide Arten von Ladungsträgern als gleich angenommene Diffusionslänge. Die so erhaltene kritische Stromstärke I_0 entspricht dem bekannten Pinch-Effekt. Tatsächlich überwiegt die magnetische Kraft bei dieser Stromstärke endgültig die Druck- (oder „Diffusions"-)Kraft sowie den rekombinativen Plasmaschwund und klemmt die Ladungsträger beliebig stark in die Mittelebene. Allerdings treten, sobald die Ungleichungen (26) oder (27) erfüllt werden, auch Instabilitäten mit größeren k_y-Werten auf, so daß das Plasma rasch in eine Reihe von Schnüren zerfällt, die in der x-Rich-

tung liegen [5]. Man kann auch sagen, daß die magnetischen Kraftlinien, die bisher geradlinig von $y=+\infty$ zu $y=-\infty$ in der oberen und von $y=-\infty$ zu $y=+\infty$ in der unteren Plattenhälfte verliefen, instabil werden und sich im Halbleiterplasma (das hier in x-und y-Richtung unbegrenzt sei) schließen, so daß das gesamte Stromlinienbild in einer unbestimmten Art „gerinnt" und hydromagnetische Turbulenz einsetzt.

Jedenfalls ist diese Instabilität sehr schwer realisierbar (nur bei Tiefkühlung der Probe und mit starken, kurzen Stromstößen [6–9]) und praktisch unwichtig, da I_0 ein verhältnismäßig sehr großer Strom ist, so daß der thermische Durchschlag gewöhnlich früher eintritt. So ist für eigenleitendes Ge mit $\bar{n}=\bar{p}=2{,}4\cdot10^{13}\ \mathrm{cm}^{-3}$ und $T=4\cdot10^{-14}$ erg

$$I_0=8{,}7\sqrt{1+L_z^2/\pi^2 L_\mathrm{d}^2}\ \mathrm{A/cm}. \tag{28}$$

Man sieht, daß solange $L_z \ll L_\mathrm{d}$ (≈ 3 mm bei reinem Ge) ist, d. h. so lange die Volumenrekombination gegenüber der Oberflächenrekombination vernachlässigt werden kann, I_0 nicht von der Plattendicke L_z abhängt. Sobald aber $L_z \gg L_\mathrm{d}$ wird, tritt die Oberflächenrekombination gegenüber der Volumenrekombination zurück und I_0 wächst linear mit L_z, d. h. die kritische Stromdichte sinkt nicht weiter, sondern wird konstant. Ist $L_\mathrm{d}=3$ mm, so wird bei $L_z=1$ cm $I_0=12{,}7$ A/cm.

§ 3. Stabilität des Stromflusses durch eine Sperrschicht

Ist ein p–n-Übergang in der Ebene $x=0$ vorhanden, so wird in Gl. (23) ε_x in der Nähe dieser Ebene schon im Gleichgewicht ($V=0$) bis auf eine Entfernung von der Ordnung der Debye-Länge L_D besonders groß sein. Die von außen angelegte Spannung ändert nicht viel daran. Sie verteilt sich auf eine wesentlich größere Strecke von der Ordnung der Diffusionslänge und ergibt ein Zusatzfeld, das gewöhnlich viel kleiner als das innere Gleichgewichtsfeld des Überganges ist. Ist der Übergang in Flußrichtung belastet, so wirkt das angelegte Feld dem Gleichgewichtsfeld entgegen, andernfalls addieren sich die Felder. Jedenfalls ändert das nicht viel am Wert von ε_x und somit wird nun das dritte Glied in Gl. (23) linear in bezug auf den Strom. Nur bei Belastung in der Sperrichtung ist dieses Glied im Übergangsgebiet instabil. In diesem Fall folgt Instabilität, wenn

$$j_x^0 > \frac{\pi^2}{2\,\varepsilon_x}\left(\frac{1}{L_z^2}+\frac{1}{L_x'^2}+\frac{1}{L_y^2}+\frac{\nu}{\pi^2\,\tau\,T}\right), \tag{29}$$

$$\text{d. h.}\quad \frac{I}{c} > \frac{\pi\,c\,\nu\,T}{8\,e^2 E_x^0 L_z}\left(1+\frac{L_z^2\,\nu}{\pi^2\,\tau\,T}+\frac{L_z^2}{L_x'^2}+\frac{L_z^2}{L_y^2}\right),$$

worin E_x^0 das elektrische Feld im p–n-Übergang ist und L_x' eine charakteristische Diffusionslänge in der x-Richtung bezeichnet, die wohl kleiner als L_x sein wird ($L_x \approx 1$ cm), aber größer als die Diffusionslänge L_d der Minoritätsträger auf beiden Seiten ist. Für $L_y \gg L_z$ ergibt sich die kritische Stromstärke

$$I_0'=\frac{\pi\,c^2\,\nu\,T}{8\,e^2 E_x^0 L_z}\left(1+\frac{L_z^2}{\pi^2 L_\mathrm{d}^2}+\frac{L_z^2}{L_x'^2}\right). \tag{30}$$

Aus dem Vergleich von Gl. (29) mit Gl. (26), oder (30) mit (27) folgt, daß I_0' ungefähr so viele Male kleiner ist als I_0, wievielmal das Gleichgewichtsfeld E_x^0 größer ist als das im homogenen eigenleitenden Material den Strom I_0 erzeugende angelegte Feld. Nehmen wir einen Wert $E_x^0=10^4$ V/cm an, so folgt aus Gl. (30) mit $\nu=5{,}62\cdot10^{-16}\ \mathrm{erg\cdot s/cm^2}$ und $T=4\cdot10^{-14}$ erg für Ge bei $L_z=1$ cm beispielsweise:

$$I_0'=0{,}345\left(1+\frac{L_z^2}{\pi^2 L_\mathrm{d}^2}+\frac{L_z^2}{L_x'^2}\right)\ \mathrm{A/cm}. \tag{31}$$

Dieser kritische Strom I_0' liegt zwar wesentlich unter dem in § 2 abgeleiteten I_0, ist aber als Sperrstrom noch schwerer (unter normalen Verhältnissen, ohne Durchschlag) erreichbar, da er gewöhnlich weit über dem Sättigungsstrom I_s der Sperrschicht liegt. Tatsächlich ist im Fall eines symmetrischen, abrupten p–n-Überganges

$$\frac{I_\mathrm{s}}{I_0}=\frac{16\,e^3 L_z^2\,n_\mathrm{m}\,E_x^0}{\pi\,\nu^2\,c\,L_\mathrm{d}(1+L_z^2/\pi^2 L_\mathrm{d}^2)}=\frac{16\,e^4\,n_\mathrm{i}\,L_z^2\,W}{\varepsilon\,\nu^2\,c^2\,L_\mathrm{d}(1+L_z^2/\pi^2 L_\mathrm{d}^2)}$$
$$=\frac{16\,e^3\,n_\mathrm{i}\,L_z^2}{\nu^2\,c^2\,L_\mathrm{d}(1+L_z^2/\pi^2 L_\mathrm{d}^2)}\sqrt{\frac{2\,n_\mathrm{i}\,T}{\pi\,\varepsilon}}\sqrt{\frac{n_\mathrm{i}}{n_\mathrm{c}}}\ln\frac{n_\mathrm{c}}{n_\mathrm{i}}, \tag{32}$$

worin $n_\mathrm{m}\,(=n_\mathrm{p}=p_\mathrm{n}\ll n_\mathrm{i})$ die Konzentration der Minoritätsträger in den Homogengebieten und n_c die

[5] Zum Beispiel aus einer Störung der Form
$$N'=a\cos(\pi\,z/L_z)\,\sin k_y\,y;$$
$\boldsymbol{k}\ (k_x, k_y, k_z)$ ist der Wellenzahlvektor.

[6] M. Glicksman u. R. A. Powlus, Phys. Rev. **121**, 1659 [1961] (Pinchbeobachtung).

[7] B. Anker-Johnson u. J. E. Drummound, Phys. Rev. **131**, 1961 [1963] (Durchschlag).

[8] M. Glicksman, J. Appl. Phys. Japan **3**, 354 [1964] (Pinchtheorie).

[9] K. W. Böer u. a., Phys. Status Solidi **1**, 169, 231, 352, K 73 [1961] (Thermischer Durchschlag).

Konzentration der Donatoren im n-Gebiet bzw. der Akzeptoren im p-Gebiet ist. Dabei sind für das Diffusionspotential $\psi_n - \psi_p$, die Breite W der Potentialstufe, das innere Gleichgewichtsfeld E_x^0 und den Sättigungsstrom in Sperrichtung I_s die Ausdrücke

$$\psi_n - \psi_p = \frac{T}{e} \ln \frac{n_n p_p}{n_i^2} \approx 2 \frac{T}{e} \ln \frac{n_c}{n_i}, \tag{33}$$

$$W = \sqrt{2 \left(\frac{n_i}{n_n} + \frac{n_i}{p_p}\right) \ln \frac{n_n p_p}{n_i^2}} \, L_D \approx 2 \sqrt{2} \, L_D \sqrt{\frac{n_i}{n_c} \ln \frac{n_c}{n_i}}, \tag{34}$$

$$E_x^0 = \frac{\psi_n - \psi_p}{W} = \sqrt{\frac{2 \pi n_i T}{\varepsilon}} \sqrt{\frac{n_c}{n_i} \ln \frac{n_c}{n_i}}, \tag{35}$$

$$I_s = \left(\frac{e D_n n_p}{L_d} + \frac{e D_p p_n}{L_d}\right) L_z = \frac{2 \, T \, e \, n_m \, L_z}{\nu \, L_d} \tag{36}$$

vorausgesetzt [10] mit $n_c \approx n_n = p_p \gg n_i$, $n_m \approx n_i^2/n_c$. Die Rekombination wurde in (33) – (36) innerhalb der Breite W des Raumladungsgebietes vernachlässigt. Für $n_c > n_i$ ist das Verhältnis (32) maximal bei $n_c = 2{,}718 \, n_i$. Damit das Gleichgewichtsfeld groß bleibt gegenüber dem angelegten, muß man aber wenigstens $n_c = 100 \, n_i$ annehmen; I_s/I_0' wird dadurch nur 2,83-mal kleiner und man erhält $E^0 = 3960$ V/cm, also einen genügend großen Wert. Mit $L_z = 1$ cm, $L_d = 0{,}1$ cm folgt aus (32)

$$I_s/I_0 = 5{,}67 \cdot 10^{-6}. \tag{37}$$

Im wesentlichen wird also das Auftreten von Instabilitäten hier durch die an Sperrschichten vorhandenen Gleichrichtereffekte verhindert.

In einem inhomogen dotierten idealen (d. h. von Versetzungen und Oberflächeneffekten freien) Halbleiterstück können Strominstabilitäten also nur zustande kommen, wenn der in Sperrichtung belastete p – n-Übergang irgendwie, z. B. durch Injektion von Elektronen ins p-Gebiet, geöffnet wird, oder wenn überhaupt keine Sperrschicht vorhanden ist, wie im $n - n^+$- oder $p - p^+$-Übergang. Am einfachsten geschieht die Injektion aus einem näher als um eine Diffusionslänge der Elektronen vorgelagerten n – p-Übergang. Das zwischen den beiden homogenen n-Gebieten eingeschobene p-Gebiet entspricht dem Vorhandensein einer Potentialschwelle für die Elektronen.

[10] Siehe z. B. O. MADELUNG, Handbuch der Physik, Bd. **20**, 2. Teil.

§ 4. Strominstabilitäten an einer Potentialschwelle

Betrachten wir also wie in § 2 eine homogene Halbleiterplatte, in der aber ein Teil (zwischen $x = -a/2$ und $x = +a/2$) eine gewisse konstante, relativ große Störstellenkonzentration N_s enthält (Donatoren oder Akzeptoren), so daß zwischen $x = -a/2$ und $x = a/2$ eine Potentialschwelle oder Mulde besteht. Überschreitet diese das FERMI-Niveau, so liegt in diesem Intervall ein Gebiet mit umgekehrtem Leitungstypus, andernfalls erscheinen nur $n - n^+$- oder $p - p^+$-Übergänge.

Auch wenn man die in § 2 betrachtete homogene Halbleiterplatte nach der Ebene $x = 0$ in zwei Teile schneidet und die Teile aneinanderfügt, erhält man ein ähnliches System. Auf der Schnittfläche entstehen nämlich lokalisierte Elektronenzustände und es stellt sich ein gewisses Oberflächenpotential ein. Fügt man einfach die beiden Teile wieder aneinander, so erhält man ein sonst homogenes System, das aber bei $x = 0$ eine unendliche Störstellendichte aufweist und somit den Grenzfall $a \to 0$, $N_s \to \infty$ mit $a \, N_s = \text{const}$ darstellt.

So kann man sich allgemein den Kontakt zweier identischer Halbleiterstücke vorstellen. Die Verteilung der Störstellen hat dabei die Form einer δ-Funktion. Ist die Oberflächenladungsdichte bei $x = 0$ groß genug und vom entsprechenden Vorzeichen, so kann in der Nähe der Schnittfläche eine Inversionsschicht entstehen und zugleich auf beiden Seiten ein p – n-Übergang. Der Abstand dieser Übergänge ist ungefähr der doppelten DEBYE-Länge gleich, liegt also weit unter der Diffusionslänge, so daß der Stromfluß in beide Richtungen leicht erfolgt.

Was geschieht nun, wenn durch die zuvor beschriebene Halbleiterplatte mit Potentialschwelle oder durch den Kontakt zweier Halbleiterstücke ein Strom durchgeführt wird? Nehmen wir an, daß das elektrische Gleichgewichtsfeld in dem jeweils in Sperrichtung belasteten p – n-Übergang größenordnungsmäßig 10^4 V/cm beträgt, so müssen laut (30) Instabilitäten auftreten, sobald $I > I_0'$ ist, mit

$$I_0' = \frac{\pi \, c^2 \, \nu \, T}{8 \, e^2 \, E_x^0 \, L_z} \left(1 + \frac{L_z^2}{\pi^2 \, L_d^2} + \frac{L_z^2}{L_x'^2}\right), \tag{38}$$

worin, wie auch in Gl. (31), der Faktor vor der Klammer in Ge etwa 0,345 A/cm beträgt. Wir kommen also wieder auf den in § 3 abgeleiteten kritischen Strom zurück. Weil hier aber keine geschlossene Sperrschicht vorliegt, werden die Instabilitäten tatsächlich auftreten, sobald der kritische Strom überschritten wird.

Bemerkenswert ist, daß auch bei Vorhandensein einer Anreicherungsschicht an der Kontaktfläche ein starkes Gleichgewichtsfeld im Raumladungsgebiet herrscht, das den kritischen Strom herunterdrückt. Ebenso können Instabilitäten an einem einfachen $p-p^+$- oder $n-n^+$-Übergang auftreten, diesmal aber jeweils nur für eine Stromrichtung.

§ 5. Strominstabilitäten in reellen Halbleitern

Ergänzen wir das bisher benützte Modell mit verschiedenartigen, chaotisch verlaufenden Versetzungen, Korngrenzen und Ungleichmäßigkeiten der Störstellenverteilung, so erhalten wir das Bild eines reellen Halbleiters. Diese Unregelmäßigkeiten bewirken alle eine wesentliche Erweiterung der Instabilitätsgrenzen, so daß Instabilitäten schon bei Gesamtströmen, die weit unter dem für ideale Verhältnisse berechneten kritischen Strom liegen, auftreten.

So ergibt z. B. die Theorie des idealen $p-n$-Überganges einen sehr kleinen Sperrstrom, der laut Gl. (37) stabil ist. Der beobachtete Sperrstrom ist aber gewöhnlich rund 10-mal größer, stellt also praktisch einen nicht aus der Theorie abgeleiteten Zusatzstrom dar. Dieser fließt z. Tl. an der Oberfläche, die oft den $p-n$-Übergang gar nicht mitmacht, und z. Tl. über Versetzungslinien, die den Übergang durchqueren. Diese Versetzungslinien können stark p-leitend sein und wie Nadeln bis tief ins n-Gebiet dringen. Oft enden sie erst an der Oberfläche. Entlang der Versetzungslinie sind im Übergangsgebiet hohe Stromdichten zu verzeichnen, selbst bei sehr kleinen angelegten Spannungen. Der Zusatzstrom wird somit schon bei sehr kleinen Belastungen an gewissen Stellen instabil sein und turbulent werden.

Ganz allgemein erscheinen Instabilitäten und Turbulenz in reellen Halbleiterstücken schon bei wesentlich kleineren Feld- und Stromstärken.

§ 6. Schlußfolgerungen

Die in dieser Arbeit behandelten Instabilitäten sind mit der Pinch-Instabilität [11] verwandt, die bei Starkstrom-Gasentladungen die Plasmaschnur abwürgt. Sobald der kritische Strom erreicht ist, steht der Plasmadruck im Gleichgewicht mit den magnetischen Kräften. Dieses Gleichgewicht ist instabil. Tritt nämlich in der Gasentladung an einer Stelle eine zufällige Verengung der Plasmaschnur auf [12], so wächst dort zugleich das abschnürende Magnetfeld und das elektrische Längsfeld (bzw. die elektrische Stromdichte), was eine weitere Verengung hervorruft und schließlich die Schnur zum Abreißen bringt, so daß die Entladung entweder abbricht oder ihren Charakter wesentlich ändert (an die Wände des Versuchsraumes gelangt usw.). Jedenfalls stellt sich ein turbulenter Zustand ein, falls die Entladung nicht abbricht (was von der äußeren Energiequelle abhängt).

Für die in §§ 4 und 5 besprochenen Halbleiterinstabilitäten ist charakteristisch, daß sie unter Mitwirkung eines Boltzmannschen Gleichgewichtsfeldes zustande kommen. Im Gegensatz zum Gasentladungs-Pinch ist dieser Effekt also linear in bezug auf die Stromstärke. Deshalb treten die Instabilitäten bei wesentlich kleineren Energiedichten des magnetischen Eigenfeldes auf, als bei dem gewöhnlichen Pinch, wo die magnetische Energiedichte mit dem Plasmadruck gleich sein muß.

Selbst in einem scheinbar homogenen Halbleiter bestehen stets Inhomogenitäten, die Potentialschwellen und -Mulden hervorrufen und so die Lage der am frühesten auftretenden Strominstabilitäten vorausbestimmen. Eine solche Inhomogenität ist die Halbleiteroberfläche selbst, besonders ihre stromdurchquerten Teile (bei den stromführenden Kontakten). Bedenkt man, daß in vorliegender Arbeit:

a) keine thermischen Effekte in Betracht gezogen wurden, obwohl diese eine stark instabilisierende Wirkung haben und bei starken Strombelastungen allein schon sogen. thermische Instabilitäten erzeugen können [9],

b) keine Effekte in Betracht gezogen wurden, die in I als Ursache von Oberflächeninstabilitäten und von Rekombinationswellen erkannt wurden,

c) nur die einfachsten Strominstabilitäten erzeugenden Störungen modellmäßig untersucht wurden [3], so kommt man zu dem Schluß, daß praktisch stets kombinierte Instabilitäten auftreten werden, mit

[11] Siehe z. B. S. Chandresekhar, Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability, Oxford University Press, London 1961, S. 565; — R. J. Tayler, Proc. Phys. Soc. London B **70**, 31, 1049 [1957]; — K. Hain, R. Lüst u. A. Schlüter, Z. Naturforschg. **13 a**, 936 [1958]; — E. Fünfer, G. Lehner u. H. Tuczek, Z. Naturforschg. **15 a**, 566 [1960].

[12] Diese zylindersymmetrische Störung erzeugt nur die einfachsten Instabilitäten.

kleineren kritischen Stromstärken, oder sogar bei beliebig kleinem Gesamtstrom.

Jedenfalls wird sich bereits bei kleinen Strombelastungen aus diesen Instabilitäten ein stationär-turbulenter Zustand des Halbleiterplasmas entwikkeln. Die verhältnismäßig hohe Dissipation, sowie die Oberflächen- und Volumenrekombination werden die Intensität dieser Turbulenz (d. h. das mittlere Quadrat der Schwankungen) stets klein halten, so daß sie nur als schwaches elektrisches Rauschen (wahrscheinlich das Funkelrauschen) in Verstärkern mit Halbleiterbauelementen zutage treten wird. Dieses Rauschen wird Gegenstand einer folgenden Arbeit (III) sein.

Instabilitäten, Turbulenz und Funkelrauschen in Halbleitern III
Turbulenz im Halbleiterplasma und Funkelrauschen

P. H. Handel

Institut für Physik der Rumänischen Akademie, Bukarest

(Z. Naturforschg. **21 a**, 579—593 [1966]; eingegangen am 12. August 1965)

Die von Strominstabilitäten in Halbleitern hervorgerufene hydromagnetische Turbulenz des Ladungsträgerplasmas wird im homogenen und isotropen Fall mit Hilfe einer Quasinormalitätshypothese behandelt. Es wurde noch die unwesentliche Einschränkung auf gleiche Beweglichkeit der Ladungsträger und auf Eigenleitung gemacht. Dynamische Grundgleichungen wurden für die stationäre und für die nicht-stationäre Turbulenz erhalten. Die stationäre Lösung ergibt ein Wellenzahlspektrum und eine Korrelationsfunktion, die ein $(1/f)$-Spektrum des Magnetfeldes liefern. Der Übergang zum räumlich begrenzten Halbleiter führt schließlich auf ein $(1/f)$-Spektrum der Stromschwankungen. Das erlaubt die allgemeine Deutung des Funkelrauschens als von Strominstabilitäten im Plasma der Ladungsträger ausgelösten Turbulenzprozeß. Die bekannten Eigenschaften des Funkelrauschens werden auf Grund dieser Theorie erklärt.

§ 1. Einleitung

In zwei früheren Arbeiten [1] wurden die in Halbleitern ohne Anlegung eines Magnetfeldes möglichen Instabilitäten des Ladungsträgerplasmas untersucht. Es sind einerseits die in I, A aufgefundenen, bei genügend großem Oberflächenpotential möglicherweise vorkommenden Oberflächeninstabilitäten und andererseits die in I, B behandelten Rekombinationswellen, jedoch besonders die in II, §§ 4 – 5, erhaltenen Strominstabilitäten an einer Potentialschwelle, z. B. an einer quer zur Stromrichtung verlaufenden Inhomogenität der Störstellenverteilung, oder an einem Kontakt. Unabhängig davon, welche Kombination dieser Effekte tatsächlich auftritt, wird der laminare Strömungszustand dadurch zerstört, und schließlich stellt sich ein turbulenter stationärer Zustand ein. Praktisch wird sich dieser Zustand sehr schnell einstellen und der Stromfluß von Anfang an turbulent sein, so daß experimentell immer ein charakteristisches Stromrauschen nachweisbar sein wird.

In diesem Zusammenhang erinnern wir an die Abwesenheit eines kritischen Stromes bei den in I, A behandelten Oberflächeninstabilitäten. Instabilitäten traten dort auch bei verschwindend kleinen angelegten elektrischen Feldstärken auf, nur waren sie in Abwesenheit des angelegten elektrischen Feldes neutral, also elektrisch nicht beobachtbar und energetisch jedenfalls in thermischem Gleichgewicht. Auch bei den in II, §§ 4 – 5, erhaltenen hydromagnetischen Strominstabilitäten kann die kritische angelegte Spannung infolge von Inhomogenitäten unter Mitwirkung von thermischen Effekten oder direkten Aktivationseffekten sehr klein werden. Auch gelang es uns noch nicht, Kombinationen der oben angeführten Instabilitäten zu behandeln und deren kritische Parameter – die jedenfalls kleiner sein werden – zu behandeln.

Die Turbulenz des Halbleiterplasmas wird in dieser Arbeit als eine vorwiegend magnetische Turbulenz behandelt. Eine einfache Abschätzung [2] zeigt, daß in Halbleiterdrähten, deren Durchmesser nicht

[1] P. H. Handel, Instabilitäten, Turbulenz und Funkelrauschen I und II, Z. Naturforschg. **21 a**, 561, 573 [1966]; im folgenden als I und II angeführt.

[2] Nehmen wir eine einzige effektive Masse m und einen einzigen Absolutwert der Driftgeschwindigkeit für beide Arten von Ladungsträgern an, so wird das Verhältnis der magnetischen zur mechanisch-kinetischen Energie $W_m/W_k = 2\,\gamma\, r_0\, N$, mit $r_0 \equiv e^2/m\,c^2$ und $\gamma \equiv \frac{1}{4} + \ln R/r$. Dabei ist N die gesamte Anzahl der Ladungsträger pro Längeneinheit, r der Halbmesser des Probenquerschnittes und R größenordnungsmäßig der Halbmesser des elektrischen Kreises, in den die Probe geschaltet ist.